**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

***№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008***

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЁННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА. I.

**А.Г.АЛИЕВА**

***Институт Математики и Механики НАН Азербайджана***

*Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности обобщённого решения одномерной смешанной задачи с граничными условиями типа Рикье для полулинейных уравнений типа Соболева четвёртого порядка. Введено понятие обобщённого решения изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье искомого решения. Далее, доказаны: теорема о единственности в целом, теорема существования в малом и теорема существования в целом обобщённого решения рассматриваемой смешанной задачи.*

В работе изучаются вопросы существования и единственности обобщённого решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{txx}(t,x) - \alpha u_{xxxx}(t,x) = F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi), & (1) \\ u(0,x) = \varphi(x)\ (0 \le x \le \pi), & (2) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 \quad (0 \le t \le T), & (3) \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ - фиксированное число; $0 < T < +\infty; F, \varphi$ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём под обобщённым решением задачи (1)-(3) понимаем следующее

**Определение.** Под обобщённым решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

*а*) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_t(t,x) \in C([0,T]\times[0,\pi])$;

$u_{xxx}(t,x), u_{tx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi))$;

*б*) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

*в*) выполняется интегральное тождество

$$\int_0^T\int_0^\pi \{u_{tx}(t,x)\cdot V_x(t,x) - \alpha u_{xxx}(t,x)\cdot V_x(t,x) + \mathsf{F}(u(t,x))\cdot V(t,x)\} dxdt = 0 \quad (4)$$

для любой функции $V(t,x)$, обладающей свойствами

$$V(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi]),\ V(t,0)=V(t,\pi)=0\ (0\le t\le T), V_x(t,x)\in L([0,T];L_2(0,\pi)), \quad (5)$$

где

$$\text{☞}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x)) \,. \quad (6)$$

## §1. Вспомогательные факты.

С целью исследования обобщённого решения задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое обобщённое решение $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\,, \quad (7)$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t,x)\sin nx dx\ (n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]). \quad (8)$$

Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_n(t)=\varphi_n\cdot e^{-\alpha n^2 t}-\frac{2}{\pi n^2}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\text{☞}(u(\tau,x))\sin nx\cdot e^{-\alpha n^2(t-\tau)}dxd\tau$$

$$(n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T])\,, \quad (9)$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx\ \ (n=1,2,\ldots)\,, \quad (10)$$

$$\text{☞}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x))\,. \quad (11)$$

**2.** Исходя из определения обобщённого решения задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

**Лемма.** Если $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ - любое обобщённое решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (9).

**3.** Обозначим через $B_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (7), рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}([0,T])$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<+\infty\,,$$

где $l \geq 0$ - целое число, $\alpha_i \geq 0\ (i=\overline{0,l}), 1 \leq \beta_i \leq 2\,(i=\overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\| = J_T(u)$. Известно (см.[1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x) \in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,t}} \equiv \sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\leq\tau\leq t}\left|u_n^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \quad (0 \leq t \leq T). \tag{12}$$

**4.** Для функции $u(t,x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ функцию $u_n(t)$ назовём её $n$-той компонентой. Пусть 💣 - любое непустое множество из пространства $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$. Совокупность $n$-тых компонент всех функций из 💣 обозначим через 💣$_n$. Справедлива (см.[1]) следующая

**Теорема 1.** Для компактности множества 💣 $\subset B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

*а*) для каждого фиксированного $n\ (n=1,2,\ldots)$ множество 💣$_n$ компактно в $C^{(l)}([0,T])$;

*б*) для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_\varepsilon$, один и тот же для всех $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \in$ 💣, такой, что

$$\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\leq t\leq T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon \quad \forall u \in 💣.$$

**5.** Очевидно, что если $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \in B^k_{2,T}$ ($k \geq 1$ - целое число), то $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|_{B^{k-1}_{1,t}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\cdot\max_{0\leq\tau\leq t}|u_n(\tau)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k\cdot\max_{0\leq\tau\leq t}|u_n(\tau)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B^k_{2,t}}. \tag{13}$$

**6.** Пусть $u(t,x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \in B^3_{2,T}$. Тогда, пользуясь оценкой (13) для $k=3$, $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$ имеем:

$$\left|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^i \cdot |u_n(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^i \cdot \max_{0\le\tau\le t} |u_n(\tau)| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \max_{0\le\tau\le t} |u_n(\tau)| = \|u\|_{B^2_{1,t}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B^3_{2,t}} \quad (i=\overline{0,2}). \tag{14}$$

Из оценок (14) и структуры пространства $B^3_{2,T}$ следует, что

$$u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x) \in C([0,T]\times[0,\pi]). \tag{15}$$

Кроме того, очевидно, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_0^{\pi} u^2_{xxx}(t,x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\cdot u_n(t)\right)^2 \le \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)^2 = \frac{\pi}{2}\cdot\|u\|^2_{B^3_{2,t}}. \tag{16}$$

Отсюда, в силу структуры пространства $B^3_{2,T}$, следует, что

$$u_{xxx}(t,x) \in C\left([0,T]; L_2(0,\pi)\right). \tag{17}$$

Далее, пользуясь соотношениями (14)-(17) и известными свойствами оператора Немецкого, доказана следующая

**Теорема 2.** Пусть

1. $F(t,x,u_1,\dots,u_4) \in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^4\right)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)$

$$|F(t,x,u_1,\dots,u_4)| \le C_R\cdot\left(1+|u_4|\right), \tag{18}$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда:

$$а)\ \forall u\in B^3_{2,T}\ F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x)) \equiv \mathcal{F}(u(t,x)) \in C\left([0,T]; L_2(0,\pi)\right); \tag{19}$$

$$б)\ \forall u\in B^2_{1,T}, V\in B^3_{2,T}\ F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),V_{xxx}(t,x)) \equiv \mathcal{F}_u(V(t,x)) \in C\left([0,T]; L_2(0,\pi)\right). \tag{20}$$

7. Пусть для натурального числа $k$:

$$\varphi(x)\in C^{(k-1)}\left([0,\pi]\right), \varphi^{(k)}(x)\in L_2(0,\pi), \varphi^{(2s)}(0)=\varphi^{(2s)}(\pi)=0 \quad \left(s=\overline{0,\left[\frac{k-1}{2}\right]}\right). \tag{21}$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечётного $k$) и равенством Парсевалля (для нечётного $k$), легко доказывается, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^k\cdot\varphi_n)^2 \le \frac{2}{\pi}\cdot\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\|^2_{L_2(0,\pi)}, \tag{22}$$

где числа $\varphi_n$ $(n=1,2,\dots)$ определены соотношением (10), причём очевидно, что оценка (22) верна и при $k=0$, если $\varphi(x)\in L_2(0,\pi)$.

**8.** В заключение параграфа условимся всюду в этой работе считать все величины вещественными, все функции действительнозначными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.

## §2. Исследование единственности обобщённого решения задачи (1)-(3)

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом обобщённого решения задачи (1)-(3).

**Теорема 3.** Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_4) \in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^4\right)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,...,u_4)-F(t,x,\widetilde{u}_1,...,\widetilde{u}_4)\right| \le C_R\cdot\sum_{i=1}^{4}\left|u_i-\widetilde{u}_i\right|, \tag{23}$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного обобщённого решения.

## §3. Исследование существования в малом обобщённого решения задачи (1)-(3)

В этом параграфе, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях $T$ ) обобщённого решения задачи (1)-(3).

**Теорема 4.** Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(2)}([0,\pi]), \varphi'''(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0$.
2. $F(t,x,u_1,...,u_4) \in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^4\right)$.
3. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,u_2,u_3,u_4)-F(t,x,u_1,u_2,u_3,\widetilde{u}_4)\right| \le C_R\cdot\left|u_4-\widetilde{u}_4\right|, \tag{24}$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда существует в малом обобщённое решение задачи (1)-(3).

**Доказательство.** Для каждого фиксированного $u\in B_{1,T}^2$ определим в $B_{2,T}^3$ оператор (относительно $V$ ) $\mathcal{P}_u$:

$$\mathcal{P}_u(V(t,x))=\widetilde{V}(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{V}_n(t)\sin nx, \tag{25}$$

где

$$\widetilde{V}_n(t)=\varphi_n\cdot e^{-\alpha n^2 t}-\frac{2}{\pi n^2}\cdot\int_0^t\int_0^\pi \mathcal{F}_u(V(\tau,x))\sin nx\, e^{-\alpha n^2(t-\tau)}dxd\tau\left(n=1,2,...;t\in[0,T]\right), \tag{26}$$

числа $\varphi_n$ $(n=1,2,...)$ определены соотношением (10) и

$$\mathcal{F}_u(V(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),V_{xxx}(t,x)) . \tag{27}$$

Очевидно, что

$$\forall u \in B^3_{2,T} \ \mathcal{N}_u(u(t,x)) = \mathcal{F}(u(t,x)) \ , \tag{28}$$

где оператор $\mathcal{F}$ определён соотношением (6).

Из (26) получаем, что при любом фиксированном $u \in B^2_{1,T}$ $\forall V \in B^3_{2,T}$:

$$\left\| \mathcal{P}_u(V) \right\|^2_{B^3_{2,T}} \equiv \left\| \widetilde{V} \right\|^2_{B^3_{2,T}} \le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi} \cdot \int_0^T \int_0^\pi \left\{ \mathcal{N}_u(V(\tau,x)) \right\}^2 dx d\tau \, , \tag{29}$$

где

$$a_0 \equiv 2\sum_{n=1}^{\infty} (n^3 \cdot \varphi_n)^2 \, , \tag{30}$$

причём конечность $a_0$ следует из (22) для $k = 3$.

Так как, по теореме 2, $\mathcal{N}_u(V(t,x)) \in C([0,T];L_2(0,\pi))$, то из (29) следует, что для любого фиксированного $u \in B^2_{1,T}$ оператор $\mathcal{P}_u$ действует в пространстве $B^3_{2,T}$.

Далее, в силу оценок (14), $\forall u \in B^2_{1,T}$ существует такое число $R_u > 0$, что $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$:

$$-R_u \le u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x) \le R_u \, . \tag{31}$$

Теперь, пользуясь соотношениями (25)-(27), имея в виду (31), пользуясь неравенством (24) для $R = R_u$ и оценкой (16) для $u = V_1 - V_2$, аналогично (29) получаем, что при любом фиксированном $u \in B^2_{1,T}$ $\forall V_1, V_2 \in B^3_{2,T}$ и $t \in [0,T]$:

$$\left\| \mathcal{A}_u(V_1) - \mathcal{A}_u(V_2) \right\|^2_{B^3_{2,t}} \le \frac{2}{\alpha\pi} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \left\{ \mathcal{N}_u(V_1(\tau,x)) - \mathcal{N}_u(V_2(\tau,x)) \right\}^2 dx d\tau \le$$

$$\le \frac{2}{\alpha\pi} \cdot C^2_{R_u} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \left\{ V_{1,xxx}(\tau,x) - V_{2,xxx}(\tau,x) \right\}^2 dx d\tau \le \frac{2}{\alpha\pi} \cdot C^2_{R_u} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^t \left\| V_1 - V_2 \right\|^2_{B^3_{2,\tau}} d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha} \cdot C^2_{R_u} \cdot \left\| V_1 - V_2 \right\|^2_{B^3_{2,T}} \cdot t \, ,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\left\| \mathcal{A}_u(V_1) - \mathcal{A}_u(V_2) \right\|^2_{B^3_{2,t}} \le \left( \frac{1}{\alpha} \cdot C^2_{R_u} \right)^k \cdot \left\| V_1 - V_2 \right\|^2_{B^3_{2,T}} \cdot \frac{t^k}{k!} \, , \tag{32}$$

где $k$ - любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B^2_{1,T}$ $\forall V_1, V_2 \in B^3_{2,T}$:

$$\left\| \mathcal{A}_u(V_1) - \mathcal{A}_u(V_2) \right\|_{B^3_{2,T}} \le q_k(u) \cdot \left\| V_1 - V_2 \right\|_{B^3_{2,T}} \, , \tag{33}$$

где

$$q_k(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{k!}} \cdot \left( \frac{1}{\alpha} \cdot C_{R_u}^2 \cdot T \right)^{\frac{k}{2}}. \tag{34}$$

Очевидно, что для достаточно больших $k = k_u$: $q_k(u) < 1$. Для таких $k$ оператор $\mathcal{A}_u^k$ оказывается сжатым в пространстве $B_{2,T}^3$. Тогда, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, единственная в $B_{2,T}^3$ неподвижная точка $V$ оператора $\mathcal{A}_u^k$ является и единственной в $B_{2,T}^3$ неподвижной точкой оператора $\mathcal{A}_u$:

$$V = \mathcal{A}_u(V), \quad V \in B_{2,T}^3. \tag{35}$$

Сопоставив каждому $u \in B_{1,T}^2$ единственную в $B_{2,T}^3$ неподвижную точку $V$ оператора $\mathcal{A}_u$ порождаем оператор $H$:

$$H(u) = V = \mathcal{A}_u(V), \tag{36}$$

действующий из $B_{1,T}^2$ в $B_{2,T}^3$ .

Далее, показывается, что оператор $H$ действует из $B_{1,T}^2$ в $B_{2,T}^3$ непрерывно и, тем более, он действует в $B_{1,T}^2$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора $H$ в $B_{1,T}^2$. Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{S}_R$ - любой замкнутый шар пространства $B_{1,T}^2$ радиуса $R$ и с центром в нуле. Тогда, в силу (14), очевидно, что при любом $u \in \mathcal{S}_R$ $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$:

$$-R \le u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x) \le R. \tag{37}$$

Тогда, пользуясь неравенством (24) и оценкой (16) для $u = V$, аналогично (29) получаем, что при любом $u \in \mathcal{S}_R$ $\forall t \in [0,T]$:

$$\|H(u)\|_{B_{2,t}^3}^2 \equiv \|V\|_{B_{2,t}^3}^2 \equiv \|\mathcal{A}_u(V)\|_{B_{2,t}^3}^2 \le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{\mathcal{F}_u(V(\tau,x))\}^2 dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{4}{\alpha\pi} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{[\mathcal{F}_u(V(\tau,x)) - \mathcal{F}_u(0)] + [\mathcal{F}_u(0)]^2\} dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{4}{\alpha\pi} \cdot C_R^2 \cdot \int_0^t \int_0^\pi V_{xxx}^2(\tau,x)) dx d\tau + \frac{4}{\alpha\pi} \cdot \|\mathcal{F}_u(0)\|_{C(Q_T)}^2 \cdot \pi t \le$$

$$\le a_0 + \frac{4T}{\alpha} \cdot \mathcal{M}_R^2 + \frac{4}{\alpha\pi} \cdot C_R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^t \|V\|_{B_{2,\tau}^3}^2 d\tau, \tag{38}$$

где число $a_0$ определено соотношением (30), $Q_T \equiv [0,T] \times [0,\pi]$, а $\mathcal{M}_R$ - максимум функции $|F(t,x,u_1,u_2,u_3,0)|$ в замкнутой области $0 \le t \le T$, $0 \le x \le \pi$, $-R \le u_1, u_2, u_3 \le R$.

Из (38), применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall u \in \text{😐}_R$:

$$\|H(u)\|^2_{B^3_{2,T}} \equiv \|V\|^2_{B^3_{2,T}} \le \left( a_0 + \frac{4T}{\alpha} \cdot \text{✌}^{\,2}_{\,R} \right) \cdot \exp\left\{ \frac{2}{\alpha} \cdot C^2_R \cdot T \right\} \equiv a^2_R . \quad (39)$$

Следовательно, множество $H(\text{😐}_R)$ ограничено в $B^3_{2,T}$.

Далее, показывается, что $\forall u \in \text{😐}_R$:

$$\max_{0 \le t \le T} \left| \int_0^\pi \text{➰}_u (V(t,x)) \sin dx \right| \le \pi \cdot \left( C^2_R \cdot a^2_R + 2 \text{✌}^{\,2}_{\,R} \right)^{\frac{1}{2}} \equiv b_R \quad (n = 1,2,...), \qquad (40)$$

$$\int_0^T \int_0^\pi \left\{ \text{➰}_u (V(\tau, x)) \right\}^2 dx d\tau \le \pi T \cdot \left( C^2_R \cdot a^2_R + 2 \text{✌}^{\,2}_{\,R} \right) \equiv c^2_R , \qquad (41)$$

$$\|(H(u))_t\|^2_{B^1_{2,T}} \equiv \|V_t\|^2_{B^1_{2,T}} \equiv \left\| \sum_{n=1}^\infty V'_n(t) \sin nx \right\|^2_{B^1_{2,T}} \equiv \sum_{n=1}^\infty \left( n \cdot \max_{0 \le t \le T} |V'_n(t)| \right)^2 \le$$

$$\le 3\alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^\infty \left( n^3 \cdot \varphi_n \right)^2 + 2b^2_R + \frac{3\alpha}{\pi} \cdot c^2_R \equiv d^2_R . \qquad (42)$$

Таким образом, из (39) и (42) следует, что

$$\forall u \in \text{😐}_R \ \|(H(u)\|_{B^{3,1}_{2,2,T}} \equiv \|V\|_{B^{3,1}_{2,2,T}} = \|V\|_{B^3_{2,T}} + \|V_t\|_{B^1_{2,T}} \le a_R + d_R \equiv e_R . \quad (43)$$

Следовательно, множество $H(\text{😐}_R)$ ограничено в $B^{3,1}_{2,2,T}$. Отсюда, по теореме 1, следует, что множество $H(\text{😐}_R)$, рассматриваемое как подмножество пространства $B^2_{1,T}$, компактно в $B^{\,2}_{1,\,T}$. Таким образом, оператор $H$ действует в $B^2_{1,T}$ компактно. Так как оператор $H$ действует в $B^2_{1,T}$ и непрерывно, то он действует в $B^2_{1,T}$ вполне непрерывно. Далее, в силу (13) для $k = 3$ и (39), $\forall u \in \text{😐}_R$ имеем:

$$\|H(u)\|_{B^2_{1,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|H(u)\|_{B^3_{2,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot a_R = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \left( a_0 + \frac{4}{\alpha} \cdot \text{✌}^{\,2}_{\,R} \cdot T \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{\alpha} \cdot C^2_R \cdot T \right\} . \quad (44)$$

Из (44) видно, что если число

$$R > \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{a_0} \qquad (45)$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях $T$

$$\forall u \in \text{😐}_R \ \|(H(u))\|_{B^2_{1,T}} \le R ,$$

т.е. $H(\text{😐}_R) \subset \text{😐}_R$.

Таким образом, для любого фиксированного $R$, удовлетворяющего условию (45), при достаточно малых значениях $T$ оператор $H$ преобразует шар $\text{😐}_R$ в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях $T$ оператор $H$ имеет в 😐$_R$ по крайней мере одну неподвижную точку $u : u = H(u)$. Так как $u = H(u) = V =$ [illegible]$_u(V)$, то $u = V$ и, следовательно, $u = H(u) =$ [illegible]$_u(u)$, причём, в силу (43), $u(t,x) \in B^{3,1}_{2,2,T}$.

Далее, в силу $u = V$ и (28), для найденной неподвижной точки $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (9). Пользуясь этим, показывается, что функция

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^{3,1}_{2,2,T} \tag{46}$$

является обобщённым решением задачи (1)-(3). Теорема доказана.

**Замечание 1.** Следует отметить, что условие 1 теоремы 4, наложенное на начальную функцию $\varphi(x)$, не только достаточно, но и необходимо для существования обобщённого решения задачи (1)-(3).

**Замечание 2.** Отметим, что при условиях 2 и 3 теоремы 4 для её доказательства нам не удалось (вообще говоря) в отдельности применить ни принцип сжатых отображений, ни принцип Шаудера, ни принцип Красносельского (являющийся обобщением предыдущих двух принципов), ни обобщённый принцип сжатых отображений и ни усиленный принцип Шаудера. Однако, в данной работе специальное комбинирование обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера позволило нам доказать теорему 4 и, тем самым, гарантировать существование в малом обобщённого решения задачи (1)-(3).

## §4. Исследование существования в целом обобщённого решения задачи (1)-(3).

В этом параграфе с помощью усиленного принципа Шаудера о неподвижной точке доказывается следующая теорема о существовании в целом обобщённого решения задачи (1)-(3).

**Теорема 5.** Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 4.
2. В $[0,T] \times [0,\pi] \times (-\infty,\infty)^4$

$$|F(t,x,u_1,\ldots,u_4)| \le C \cdot (1 + |u_1| + \ldots + |u_4|), \tag{47}$$

где $C > 0$ - постоянная.

Тогда существует обобщённое решение задачи (1)-(3).

**Доказательство.** Для доказательства данной теоремы достаточно в процессе доказательства теоремы 4 делать некоторые изменения и добавления. А именно, пусть $H$ - оператор, введённый в процессе доказательства теоремы 4. Как было показано в процессе доказательства теоремы 4, оператор $H$ действует в пространстве $B^2_{1,T}$ вполне непрерывно, даже он действует из $B^2_{1,T}$ в $B^3_{2,T}$. По определению оператора $H$ :

$$\forall u \in B^2_{1,T} \quad H(u) = V = \mathcal{Q}_u(V)\,,$$

где оператор $\mathcal{Q}_u$ определён соотношениями (25)-(27).

Теперь рассмотрим в $B^2_{1,T}$ уравнения

$$u = \lambda H(u),\ \ 0 \le \lambda \le 1\,, \tag{48}$$

и априори оценим всевозможные в $B^2_{1,T}$ их решения. Так как

$$u = \lambda H(u) = \lambda V = \lambda \mathcal{Q}_u(V)\,,$$

то, совершенно аналогично (29) и (38), получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^3_{2,t}} \equiv \|\lambda H(u)\|^2_{B^3_{2,t}} \equiv \|\lambda V\|^2_{B^3_{2,t}} \equiv \|\lambda \mathcal{Q}_u(V)\|^2_{B^3_{2,t}} \le \lambda^2 \cdot a_0 +$$

$$+\lambda^2 \cdot \frac{2}{\alpha\pi} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{\mathcal{Q}(V(\tau,x)\}^2\, dx d\tau \le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi} \cdot \lambda^2 \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{\mathcal{Q}(V(\tau,x)\}^2\, dx d\tau\,, \tag{49}$$

где число $a_0$ определено соотношением (30).

Отсюда, пользуясь неравенством (47), соотношением $\lambda V = u$ и оценками (14),(16) и (13) для $k = 3$, получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^3_{2,t}} \le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi} \cdot \lambda^2 5C^2 \cdot \int_0^t \left\{ \pi + \int_0^\pi u^2(\tau,x)dx + \int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx + \int_0^\pi V_{xxx}^2(\tau,x)dx \right\} d\tau \le a_0 + \frac{10}{\alpha} \cdot C^2 \cdot T +$$

$$+ \frac{10}{\alpha\pi} \cdot C^2 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\pi u^2(\tau,x)dx + \int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx + \int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx + \int_0^\pi \lambda^2 V_{xxx}^2(\tau,x)dx \right\} d\tau =$$

$$= a_0 + \frac{10T}{\alpha} \cdot C^2 + \frac{10}{\alpha\pi} \cdot C^2 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\pi u^2(\tau,x)dx + \int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx + \int_0^\pi u_{xxx}^2(\tau,x)dx \right\} d\tau \le a_0 + \frac{10T}{\alpha} \cdot C^2 +$$

$$+ \frac{10}{\alpha\pi} \cdot C^2 \cdot \int_0^t \left\{ 3\|u\|^2_{B^2_{1,\tau}} + \frac{\pi}{2}\|u\|^2_{B^3_{2,\tau}} \right\} d\tau \le a_0 + \frac{10T}{\alpha} \cdot C^2 +$$

$$+ \frac{10}{\alpha\pi} \cdot C^2 \cdot \int_0^t \left\{ 3 \cdot \frac{\pi^2}{6}\|u\|^2_{B^3_{2,\tau}} + \frac{\pi}{2}\|u\|^2_{B^3_{2,\tau}} \right\} d\tau =$$

$$= a_0 + \frac{10T}{\alpha} \cdot C^2 + \frac{5(\pi+1)}{\alpha} \cdot C^2 \cdot \int_0^t \|u\|^2_{B^3_{2,\tau}}\, d\tau\,. \tag{50}$$

Из (50), применив неравенство Беллмана, получаем:

$$\|u\|^2_{B^3_{2,T}} \le \left(a_0 + \frac{10T}{\alpha}\cdot C^2\right)\cdot \exp\left\{\frac{5(\pi+1)}{\alpha}\cdot C^2\cdot T\right\} \equiv C_0^2 . \qquad (51)$$

Таким образом, всевозможные в $B^2_{1,T}$ решения $u$ уравнений (48) априори ограничены в $B^3_{2,T}$ и, тем более, в $B^2_{1,T}$, ибо, в силу (13) для $k=3$, $\|u\|_{B^2_{1,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B^3_{2,T}}$. Тогда, в силу усиленного принципа Шаудера о неподвижной точке, оператор $H$ имеет в $B^2_{1,T}$ неподвижную точку $u$, которая принадлежит пространству $B^{3,1}_{2,2,T}$ и является обобщённым решением задачи (1)-(3). Теорема доказана.


### ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дис…докт.физ.-мат.наук, Баку, 1973г., Азербайджанский Государственный Университет, 319 с.


## BİR SİNİF DÖRDÜNCÜ TƏRTİB SOBOLEV TİPLİ YARIM-XƏTTİ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİNİN TƏDQİQİ. I.


**A.Q.ƏLİYEVA**



### XÜLASƏ

İş bir sinif dördüncü tərtib Sobolev tipli yarım-xətti tənliklər üçün Rikye tipli sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Öyrənilən qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin tərifi verilir. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra baxılan məsələnin həlli axtarılan həllin naməlum Furye əmsallarına nəzərən müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqral tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Nəticədə baxılan qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin qlobal yeganəliyi, lokal və qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilir.


## STUDY OF GENERALIZED SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF SEMI-LINEAR FOURTH ORDER EQUATIONS OF SOBOLEV TYPE. I.


**A.G.ALIYEVA**



### SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of generalized solution of one-dimensional mixed problem for one class of semi-linear fourth order equations of Sobolev type. Conception of generalized solution for mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integral equations in unknown Fourier coefficients of the sought solution. Besides, uniqueness theorem in large, existence theorem in small and existence theorem in large for the generalized solution of the mixed problem under consideration are also proved in this work.